Exercice 1 **5 points**

Partie A

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x).$$

1. • Limite en 0 : On sait que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln(x) = 0$, que $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
   • Limite en $+\infty$: en écrivant $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, on a :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} -2\ln(x) = -\infty$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 2\ln(x) = -\infty$ et enfin par produit de limites :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. Pour tout réel de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2x - 4x\ln(x) - 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x)$.
3. Puisque $x \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $\ln(x)$.
   On sait que $\ln(x) < 0$ sur $[0\,;\,1[$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,1[$ et que
   $\ln(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.
   La fonction f est donc :
   • croissante sur $[0;\,1]$ de 1 à $f(1) = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 0 = 2$;
   • décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ de 2 à moins l'infini.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 1	↗	2	↘	$-\infty$

4. La fonction f est continue car dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty]$ et décroissante de 2 à moins l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α, avec $\alpha \in]1\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   Comme $f(\mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2(1 - 2\ln \mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2(1 - 2) = 1 - \mathrm{e}^2 \approx -6,4$.
   En appliquant le même théorème, on a donc $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0;\,1]$.
Rem. : comme $0 \notin [1\,;\,2]$ le même théorème montre qu'il n'existe pas de réel $\beta \in [0\,;\,1]$ tel que $f(\beta) = 0$.

5. On part de l'intervalle [1 ; 2,7], (avec e $\approx 2,7$) `dichotomie(1)` donne par dichotomie un encadrement de α par deux réels a et b tels que $b-a \leqslant 10^{-1}$.

Comme $\alpha \approx 1,9$, C et D sont exclus et A ne donne pas un encadrement au dixième : reste la proposition B.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, par

$$g(x)=\frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. g est un quotient de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, le dénominateur étant non nul (supérieur ou égal à 1), donc quel que soit $x \in]0~;~+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times\left(1+x^2\right)-2x\ln(x)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{\frac{1+x^2-2x^2\ln(x)}{x}}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2-2x^2\ln(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}=\frac{f(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}.$$

2. Le résultat précédent montre que puisque $x>0$ et $\left(1+x^2\right)^2>0$, le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur donc le signe de $f(x)$.

Or on a vu (Partie A question 3.) que $f(x)>0$ sur $]0~;~\alpha[$ et $f(x)<0$ sur $]\alpha~;~+\infty[$.

La fonction g est donc croissante sur $[0~;~\alpha]$, puis décroissante sur $[\alpha~;~+\infty[$ avec un maximum $g(\alpha)$.

Rem. : on sait que $f(\alpha)=0 \iff 1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha \iff 2\alpha^2\ln\alpha=1+\alpha^2 \iff$
$\ln\alpha=\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$.

Donc $g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{1+\alpha^2}=\dfrac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2}=\dfrac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse α.

- On a $M(x~;~y)\in T_1 \iff y-g(1)=g'(1)(x-1) \iff y-0=\dfrac{1}{2}(x-1)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$;
- On a vu que la fonction a un maximum en α et en ce point le nombre dérivé égal au coefficient directeur de la tangente en ce point (donc T_α) est nul : la tangente est donc horizontale d'équation $y=g(\alpha)$ ou $y=\dfrac{1}{2\alpha^2}$.

Donc $M(x~;~y)\in T_1\cap T_\alpha \iff \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\alpha^2}$, soit
$x-1=\dfrac{1}{\alpha^2} \iff x=1+\dfrac{1}{\alpha^2}$ et $y=\dfrac{1}{2\alpha^2}$.

Donc $T_1\cap T_\alpha\left(1+\dfrac{1}{\alpha^2}~;~\dfrac{1}{2\alpha^2}\right)$.